Н. В. Мартемьянова

Поволжская государственная социально-гуманитарная академия, ninamartem@yandex.ru

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА – БИЦАДЗЕ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

Рассмотрим уравнение Лаврентьева — Бицадзе с неизвестной правой частью

$$Lu \equiv u_{xx} + \operatorname{sign} y \cdot u_{yy} - b^2 u = f(x) \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x, y) |\ 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, b — заданные действительные числа, и рассмотрим следующую обратную задачу с нелокальным граничным условием.

Обратная задача. *Найти в области D функции $u(x, y)$ и $f(x)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+); \tag{2}$$

$$f(x) \in C(0, 1); \tag{3}$$

$$Lu = f(x), (x, y) \in D_- \cup D_+; \tag{4}$$

$$u_x(0, y) = u_x(1, y),\ u(1, y) = 0,\ -\alpha \leqslant y \leqslant \beta; \tag{5}$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x),\ u(x, -\alpha) = \psi(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1; \tag{6}$$

$$u_y(x, -\alpha) = g(x),\ 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{7}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x)$ — заданные достаточно гладкие функции,

$$\varphi(1) = \psi(1) = 0,\ \varphi'(0) = \psi'(1),\ \psi'(0) = \psi'(1),$$

$$D_+ = D \cap \{y > 0\}, \ D_- = D \cap \{y < 0\}.$$

Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах. Отметим здесь прежде всего работы А. Н. Тихонова [1], М. М. Лаврентьева [2 – 4], В. К. Иванова [5] и их учеников. Более подробно об этом можно найти в монографии А. М. Денисова [6].

В работах [7], [8] методом спектральных разложений получены новые теоремы существования и единственности решения прямых задач для уравнений смешанного типа в прямоугольных областях. Таким методом решены обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа [9], [10]. В работе [11] при всех $b \geqslant 0$ установлены необходимые и достаточные условия единственности решения обратной задачи (2) – (7), и решение построено в виде суммы биортогонального ряда

$$u(x,y) = T_0(y)(1-x) + \sum_{k=1}^{\infty} T_{2k-1}(y) \sin 2\pi k x d + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} T_{2k}(y)(1-x)\cos 2\pi k x, \quad (8)$$

$$f(x) = f_0(1-x) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k-1} \sin 2\pi k x + \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k}(1-x)\cos 2\pi k x, \quad (9)$$

где

$$T_0(y) = 2\int_0^1 u(x,y)dx, \qquad f_0 = 2\int_0^1 f(x)dx,$$

$$T_{2k}(y) = 4\int_0^1 u(x,y)\cos 2\pi k x dx, \qquad f_{2k} = 4\int_0^1 f(x)\cos 2\pi k x dx,$$

$$T_{2k-1}(y) = 4\int_0^1 u(x,y)x\sin 2\pi kx dx,$$

$$f_{2k-1} = 4\int_0^1 f(x)x\sin 2\pi kx dx.$$

Доказаны следующие утверждения.

Теорема 1. *Если существует решение задачи* (2) – (7), *то оно единственно только тогда, когда при всех* $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ *и* $\lambda_k = \sqrt{b^2-(2\pi k)^2}$ *выполнено условие*

$$\Delta_{\alpha\beta}(k) = \sin\lambda_k\alpha \operatorname{sh}\lambda_k\beta - \cos\lambda_k\alpha \operatorname{ch}\lambda_k\beta + 1 \neq 0. \tag{10}$$

Лемма 1. *Если выполнено одно из следующих условий: 1)* $\alpha = p$ *– натуральное; 2)* $\alpha = p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$, $(p,q) = 1$, $(q,4) = 1$, *то существует положительная постоянная* C_0, *вообще говоря, зависящая от* α, *такая, что при больших* k *и любых* $\beta > 0$ *справедлива оценка*

$$|\Delta_{\alpha\beta}(k)| \geqslant C_0 e^{2\pi k\beta} > 0. \tag{11}$$

Теорема 2. *Если функции* $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^3[0,1]$ *и удовлетворяют условиям* $\varphi(1) = \psi(1) = 0$, $\varphi'(0) = \varphi'(1)$, $\psi'(0) = \psi'(1)$, $\varphi''(1) = \psi''(1) = 0$, *а функция* $g(x) \in C^2[0,1]$ *и* $g(1) = 0$, $g'(0) = g'(1) = 0$, *а также выполнены условия* (10) *и* (11), *то существует единственное решение задачи* (2) – (7), *где функции* $u(x,y)$ *и* $f(x)$ *определяются соответствующими рядами* (8) *и* (9).

В данной работе доказана устойчивость решения по граничным данным в нормах пространств W_2^n и $C(\overline{D})$.

Пусть

$$\|u\|_{L_2[0,1]} = \left(\int_0^1 |u(x,y)|^2 dx \right)^{1/2},$$

$$\|u(x,y)\|_{C(\overline{D})} = max_{\overline{D}} |u(x,y)|,$$

$$\|f(x)\|_{W_2^n} = \left(\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} |f^k(x)|^2 \right) dx \right)^{1/2}.$$

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для решения задачи* (2) – (7) *имеют место оценки:*

$$\|u(x,y)\|_{L_2} \leqslant N_1 \left(\|\varphi\|_{L_2} + \|\psi\|_{L_2} + \|g\|_{L_2} \right),$$

$$\|f(x)\|_{L_2} \leqslant N_2 \left(\|\varphi\|_{W_2^2} + \|\psi\|_{W_2^2} + \|g\|_{W_2^1} \right),$$

$$\|u(x,y)\|_{C(\overline{D})} \leqslant N_3 \left(\|\varphi\|_{W_2^1} + \|\psi\|_{W_2^1} + \|g\|_{W_2^0} \right),$$

$$\|f(x)\|_{C[0,1]} \leqslant N_4 \left(\|\varphi\|_{W_2^3} + \|\psi\|_{W_2^3} + \|g\|_{W_2^2} \right),$$

где постоянные N_i не зависят от $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Тихонов А. Н. *Об устойчивости обратных задач* // ДАН. – 1943. – Т. 39. – № 5. – С. 195-198.

2. Лаврентьев М. М. *Об одной обратной задаче для волнового уравнения* // Докл. АН СССР. – 1964. – Т. 157. – № 3. – С. 520-521.

3. Лаврентьев М. М., Романов В. Г., Шишатский С. Т. *Некорректные задачи математической физики и анализа.* – М.: Наука, 1980. – 286 с.

4. Лаврентьев М. М., Резницкая К. Г., Якно В. Г. *Одномерные обратные задачи математической физики.* – Новосибирск: Наука СО, 1982. – 88 с.

5. Иванов В. К., Васин В. В., Танана В. П. *Теория линейных некорректных задач и ее приложения.* – М.: Наука, 1978. – 206 с.

6. Денисов А. М. *Введение в теорию обратных задач.* – М.: МГУ, 1994. – 208 с.

7. Сабитов К. Б. *Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области* // Докл. РАН. – 2007. – Т. 413. – № 1. – С. 23-26.

8. Сабитов К. Б. *Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа третьего порядка* // Докл. РАН. – 2009. – Т. 427. – № 5. – С. 593-596.

9. Сабитов К. Б., Сафин Э. М. *Обратная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области* // Докл. РАН. – 2009. – Т. 429. – № 4. – С. 451-454.

10. Сабитов К. Б., Сафин Э. М. *Обратная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области* // Известия Вузов. Математика. – 2010. – № 4. – С. 55-62.

11. Мартемьянова Н. В. *Обратная задача для уравнения смешанного типа с нелокальным граничным условием* // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия (в печати).